

MATEMÁTICA

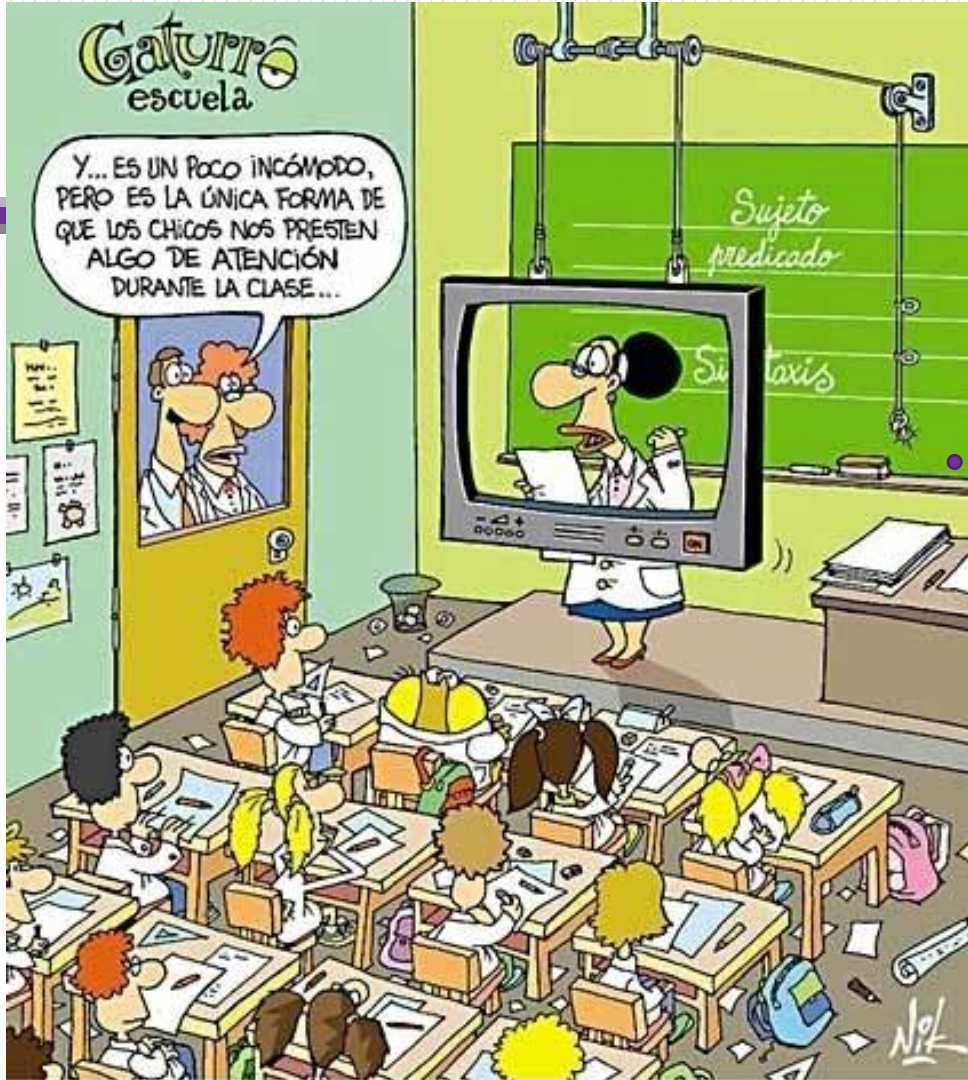
Taller:

Enseñar matemática con asistencia de los software de
matemática

Primer Encuentro

Profesorado de Matemática
Año 2012

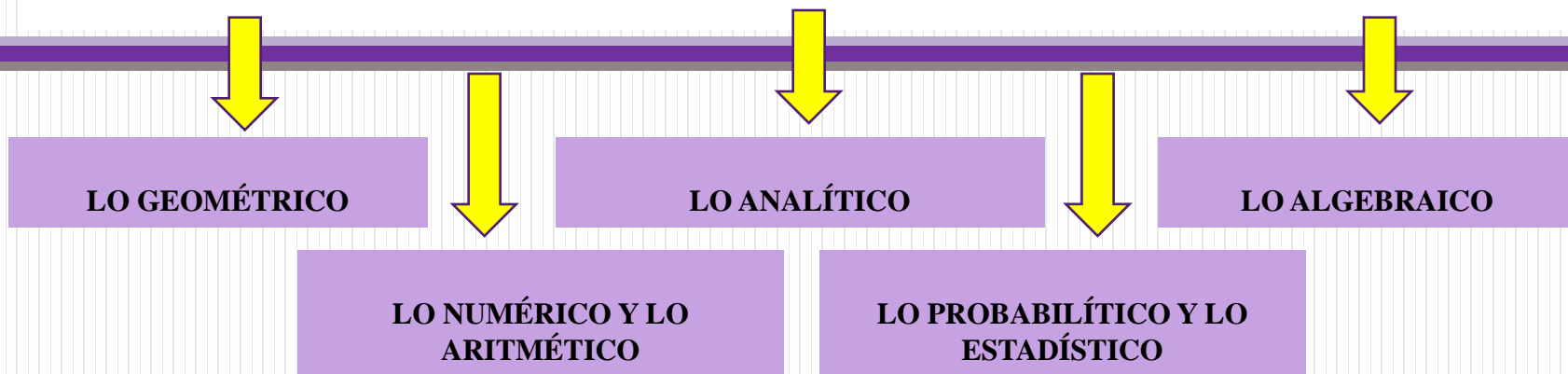
Una reflexión inicial



No debemos llegar a esto... ¿cierto?

PROYECTO DE MEJORA PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES PARA EL NIVEL SECUNDARIO

NÚCLEOS PROBLEMATIZADORES



¿Cuáles son los software que podemos utilizar?

1er
encuentro

Graphmatica

2do
encuentro

GeoGebra

4to
encuentro

Winplot

Microsoft Math

3er
encuentro

5to
encuentro

Máxima

Otros como ...

Para
continuar...



- Pensamiento variacional.
- Pensamiento aritmético-algebraico-funcional.
- Tratamiento de las igualdades.
- Procesos de modelización matemática.
- Método de resolución de problemas: Heurístico-Dialéctico-Aproximaciones analíticas y geométricas.
- Métodos numéricos y su potencialidad para resolver problemas que no admiten solución exacta.
- Utilidad de elementos analíticos para superar el enfoque geométrico.
- Optimización de funciones.
- Estudio de problemas de optimización, de la recta tangente a una curva y plano tangente a una superficie.
- Problemas de optimización en Economía, Biología, Sociología, etcétera.
- Uso flexible de las formas de representar los procesos variacionales: verbal (coloquial), visual, numérica y algebraicamente.
- Argumentación, validación.
- Sistemas de representación gráfica de funciones (coordenadas polares, cartesianas, etc.). Cambios de coordenadas. Parametrizaciones. Gráficos de curvas y superficies.
- Recursos Tecnológicos: graficadores, planillas de cálculo, procesadores simbólicos, sistemas y plataformas informáticas.

Estudio matemático de nociones físicas, geométricas y de optimización (ondas, flujo del calor, velocidad, centros de gravedad, aceleración, problemas de máximos y mínimos, recta y plano tangente, etc.)
 Superficies orientadas, trayectorias. Recta tangente a una curva y plano tangente a una superficie. Derivadas. Diferencial. Hessiano. Multiplicadores de Lagrange. Gradiente. Rotor. Integración en una y varias variables, cálculos de longitudes de curvas. Ecuaciones diferenciales. Series de potencia, Series de Fourier, Complejos. Funciones complejas, etc.

Vincula con los núcleos "Lo algebraico" y "Lo geométrico"

Las funciones: sus representaciones y su estudio
 Funciones elementales de una y de varias variables. Tipos de funciones. Coordenadas: cartesianas, polares, etcétera. Funciones vectoriales. Funciones complejas (holomorfas). Función implícita. Comportamientos funcionales, distintos elementos para su análisis (ceros/máximos/inflexión/punto silla, asíntotas, continuidad, etc.). Resolución de ecuaciones. Proceso inverso y funciones inversas

Vincula con los núcleos "Lo algebraico" y "Lo probabilístico y lo estadístico"

LO INFINITAMENTE GRANDE O PEQUEÑO
 ¿Cómo precisar la noción de tendencia?
 ¿Qué caracteriza al conjunto de números reales y lo distingue del conjunto de los números racionales?
 ¿Qué precisiones matemáticas se requieren para formalizar las ideas intuitivas del Análisis?

LO VARIACIONAL
 ¿De qué modo describir matemáticamente la variación de los procesos que modelizan el mundo físico y material?
 ¿Cómo obtener información de procesos variacionales que permita describirlos, estimar magnitudes, optimizar procesos y predecir comportamientos?

Vincula con los núcleos "Lo numérico y aritmético", "Lo algebraico" y "Lo probabilístico y lo estadístico"

APROXIMACIONES DE LO NO LINEAL
 ¿Cómo aproximar funciones?
 ¿Cómo obtener la mejor aproximación lineal de una función?
 ¿Cómo expresar analíticamente razones de cambio?
 ¿Cómo optimizar procesos?
 ¿Cómo estimar áreas y volúmenes?

Vincula con el núcleo "Lo numérico y aritmético" y "Lo algebraico"



Métodos exactos y aproximados del Análisis
 Aproximación de funciones mediante polinomios y mediante polinómicas a trozos. Recta y plano tangente. Fórmula de Taylor. Estudio de cotas de errores. Integración: métodos exactos y aproximaciones numéricas. Controles del error. Volúmenes de sólidos y volúmenes de revolución. Vínculo entre derivación e integración. Resolución numérica de ecuaciones. Métodos (bisección, Newton, etc.) y análisis de convergencia.

Elementos para fundamentar el Análisis
 Teoría de conjuntos. Paradojas del infinito. Noción de sucesiones. Límite funcional. Series. Concepto de número real y conjunto de los números reales: construcción, expresión decimal. Completitud. Sucesiones de Cauchy. Tipos de infinito (numerabilidad y no numerabilidad). El concepto de función como terna funcional Métricas. Generalizaciones de conceptos y resultados a espacios métricos y topológicos.

Graphmatica



🖥️ Sitio Oficial: <http://www8.pair.com/ksoft/index.html>

El sitio está en inglés; sin embargo, es posible traducir la página empleando el traductor de Google:

Google

Prueba un nuevo navegador con traducción automática. [Descargar Google Chrome](#) [Ignorar](#)

Traductor Del: inglés Al: español Traducir

inglés español francés español inglés francés <http://www8.pair.com/ksoft/index.html>

Instrucciones

- [Preguntas más frecuentes](#)
- [Ayuda en línea](#)
- [Instalación](#)
- [Orden](#)
- [La distribución de](#)

Traducciones

Ayudado

- Español
- English
- Dansk

Graphmatica ...

es un potente y fácil de usar, plotter ecuación con car

- Gráfico cartesiano las funciones, las relaciones
- Hasta 999 gráficos en la pantalla a la vez.
- Nuevos datos trazado y características de ajus
- Numéricamente resolver y representar gráfico
- Encontrar los puntos críticos, soluciones a las
- Imprima sus gráficos o copiar al portapapeles
- Calidad de los gráficos de mundo de dibujo

En el punto [-1.87, 0.52] sobre $y = -1/x$ hipérbola

Graphmatica para Win32 párrafo FUE Diseñado especialmente el párrafo de Windows 95/98/ME/2000/Vista/7 o Posteriores. TIENE TODAS las sutilezas hechas POSIBLES Por La Plataforma Win32:

- Nombres Largos de Archivos
- Metarchivos mejorados (nota: se necesita la Palabra de 97 párr pegarlos in contradictorio OTRAS)
- Barra de Herramientas estándar Con Imágenes en Colores y Ayuda Sobre Cada Herramienta.

Como Obtener Su Copia

- Descargar english version 2.0i
 - [párrafo de Windows \[826 KB\]](#)
 - [para Mac OS X \[1.8 MB\]](#)
- [Detalles de los Cambios en this version](#)

Graphmatica

Graphmatica es un editor gráfico, interactivo, de ecuaciones algebraicas que puede ser usado como una ayuda para dibujar curvas matemáticas.

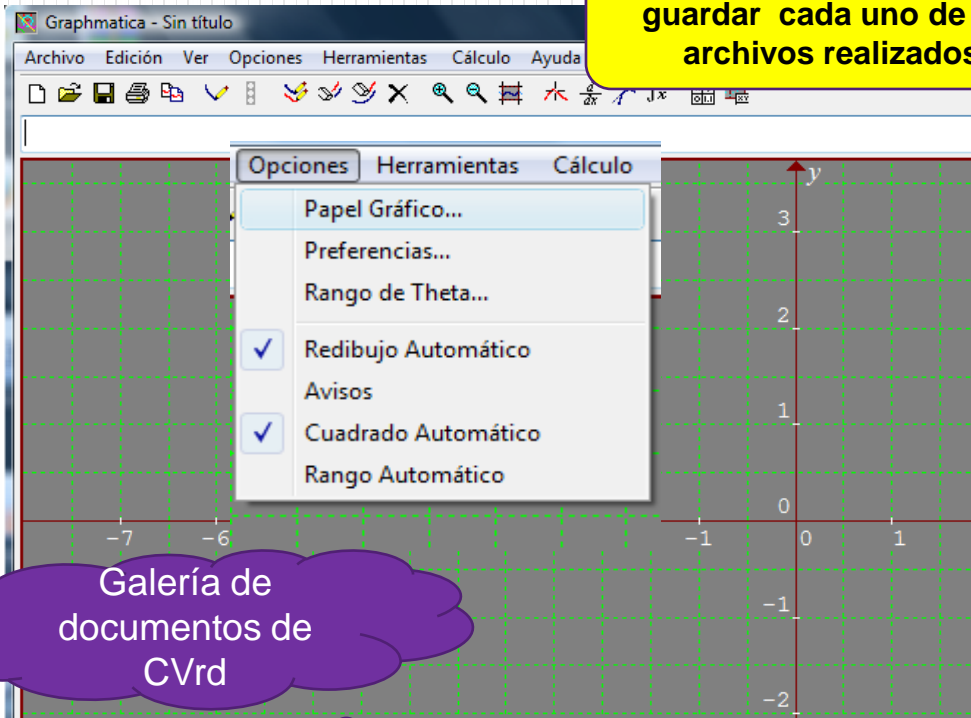
Ha sido diseñado para ser simple en su uso, pero tiene características avanzadas que no resultan evidentes en un primer momento.

Es Freeware.

ABRIR UNA CARPETA y guardar cada uno de los archivos realizados

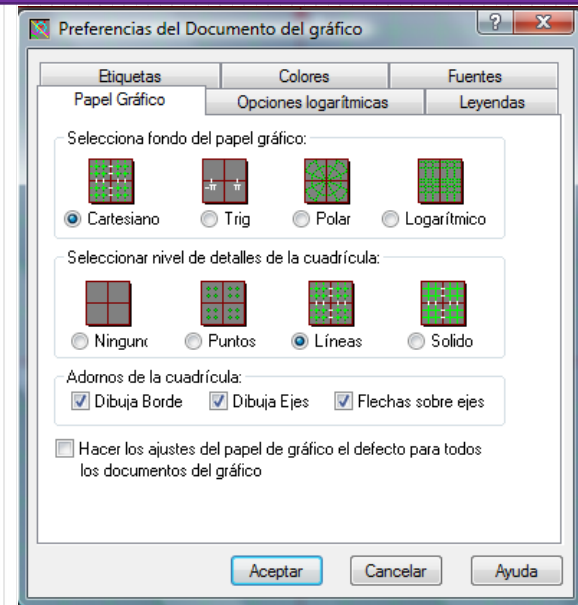
Se abre por defecto una cuadrícula en color GRIS

Es posible realizar modificaciones tanto en PAPEL GRÁFICO como en PREFERENCIAS



Galería de documentos de CVrd

Manual de Graphmatica



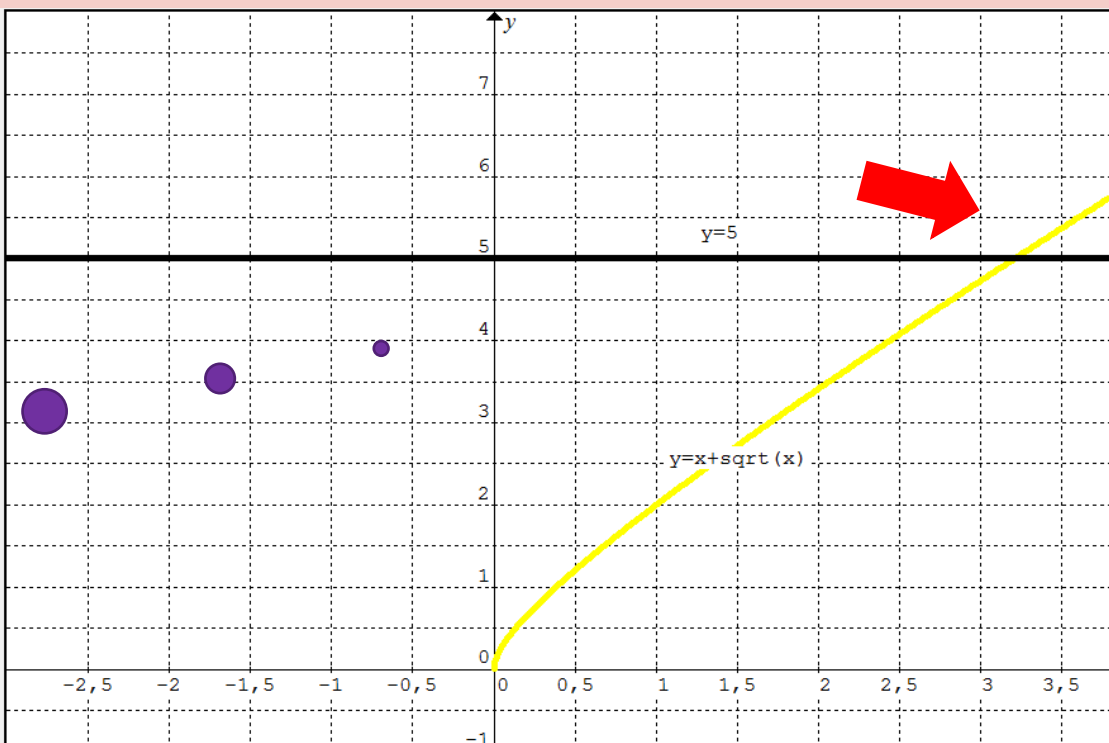
ACTIVIDAD N°1

Encontrar un número real x que cumpla que $x + \sqrt{x} = 5$

Dependerá de los conocimientos algebraicos de los alumnos y de su familiaridad con los ejes cartesianos el que recurran, o no, a un gráfico para representar la ecuación.

Material de consulta:
"Modelización matemática en el aula"
(Segal- Giuliani, 2008,
Cap. IV)

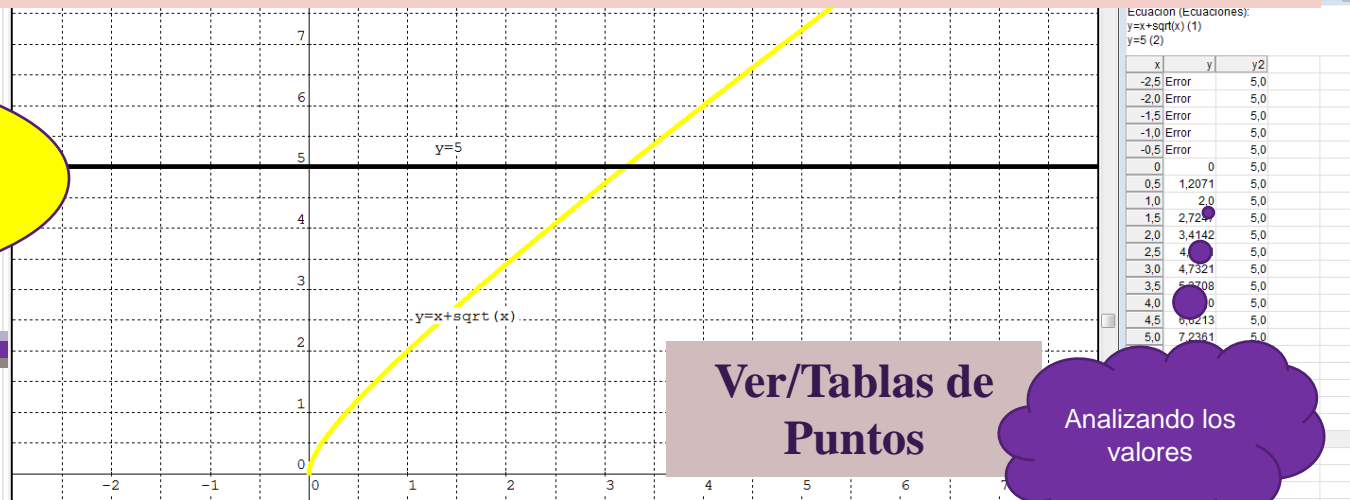
Esta ecuación se puede interpretar como la intersección de las gráficas de las curvas $y = x + \sqrt{x}$ e $y = 5$



PRIMERA
INTERPRETACIÓN
GRÁFICA

Podemos pedir que se visualice la **tabla de puntos** creada por Graphmatica para realizar la grafica obtenida.

Un recorrido por posibilidades de Graphmatica

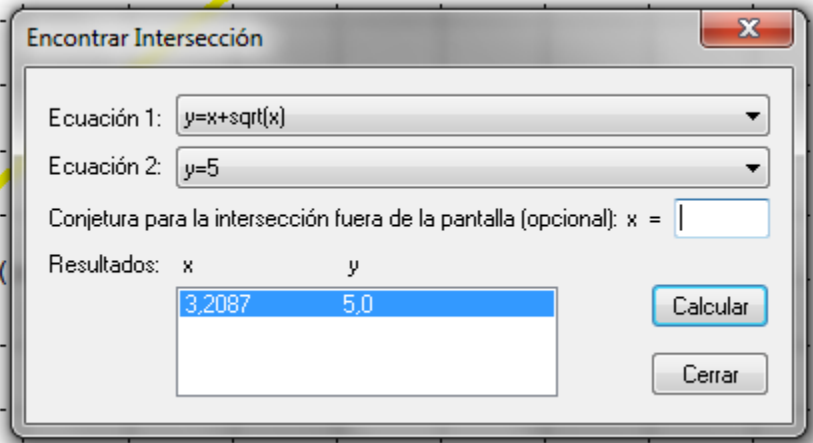
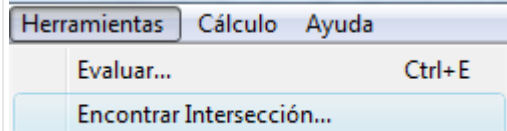
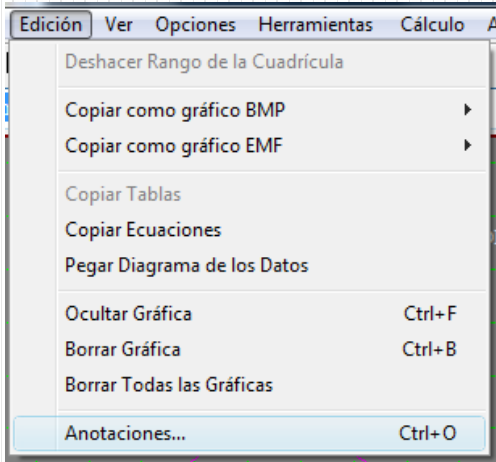


Ver/Tablas de Puntos

Analizando los valores

Podemos encontrar **la intersección** de las gráficas de las curvas.

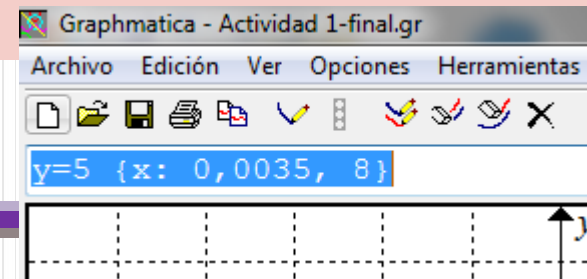
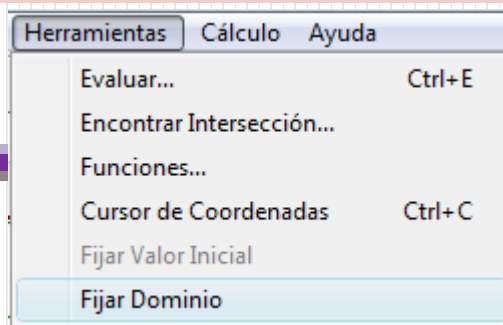
Podemos escribir la ecuación al lado de cada recta.



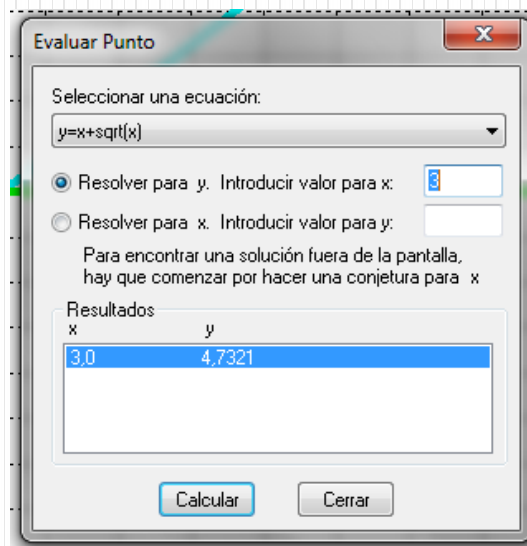
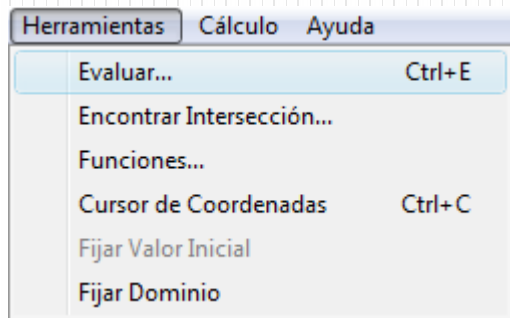
Es posible fijar **el dominio** sobre el cual se va a trabajar.

- hago clic en Fijar dominio
- arrastro el cursor pintando el intervalo de valores de x considerados.
- al soltar aparece en el campo donde esta escrita la ecuación el conjunto de puntos considerados para el dominio.

Un recorrido por posibilidades de Graphmatica



Graphmatica permite obtener **el valor de una de las variables** en función de un valor designado a la otra variable.



Como **los ceros** de la función $f(x) = x + \sqrt{x} - 5$

SEGUNDA INTERPRETACIÓN

Windows Critical Points

1. Seleccionar una ecuación:
 $y = x + \sqrt{x} - 5$

2. Introducir posible valor para x :

3. Encontrar: Ceros Extremos próximos al punto

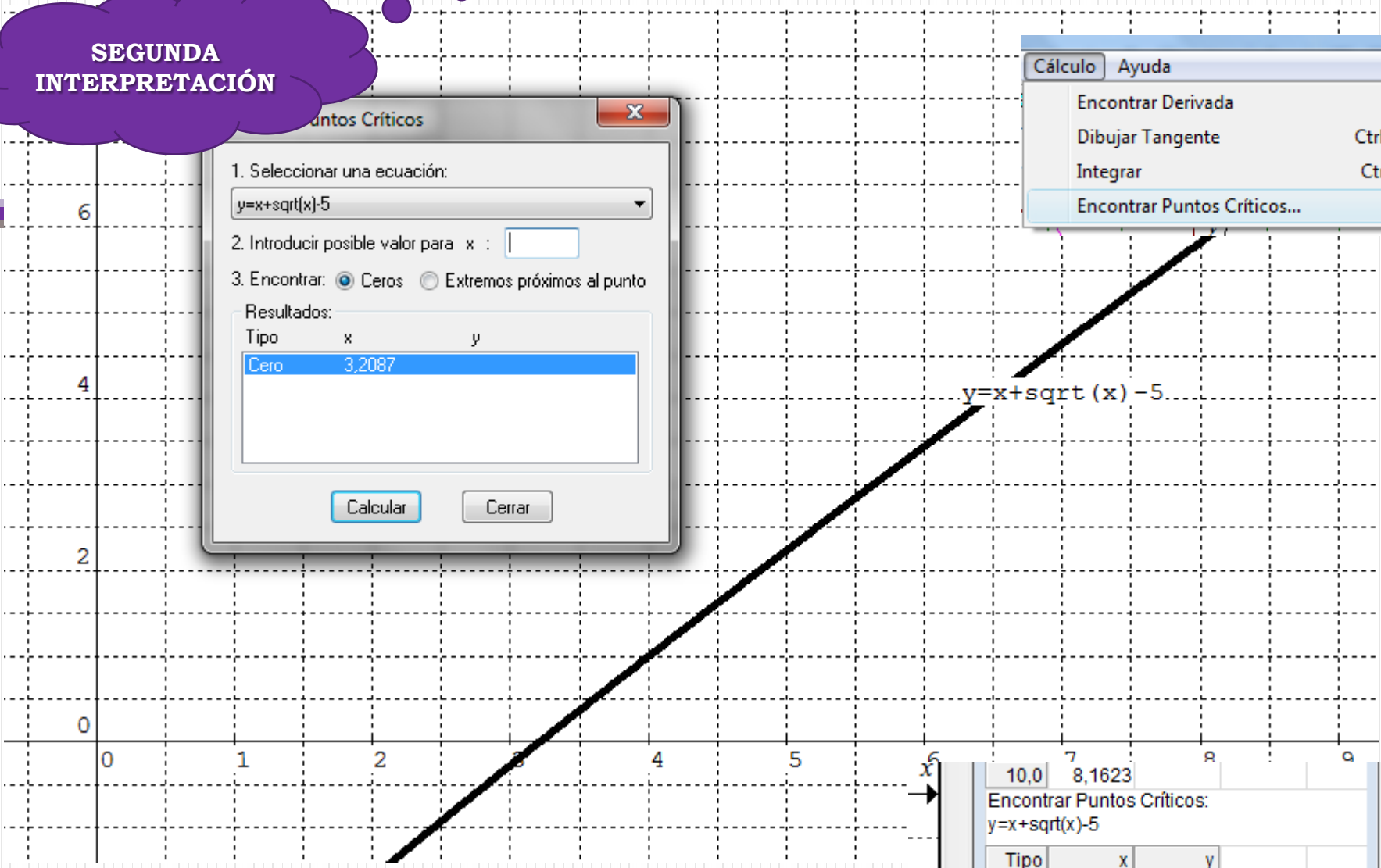
Resultados:

Tipo	x	y
Cero	3,2087	

Calcular Cerrar

Calculo Ayuda

- Encontrar Derivada
- Dibujar Tangente Ctrl+T
- Integrar Ctrl+I
- Encontrar Puntos Críticos...



$y = x + \sqrt{x} - 5$

10,0	8,1623
Encontrar Puntos Críticos: $y = x + \sqrt{x} - 5$	
Tipo	x y
Cero	3,2087

ACTIVIDAD N°2:

Encontrar los valores de x para los cuales

$$|4 - 2x| = 3x - 2$$

Esto permite analizar cómo opera el software para realizar los cálculos

Su aplicación en el aula

Encontrar Intersección

Ecuación 1: $y=3x-2$

Ecuación 2: $y=abs(4-2x)$

Conjetura para la intersección fuera de la pantalla (opcional): $x =$


Resultados:

x	y
<input type="text"/>	

Calcular

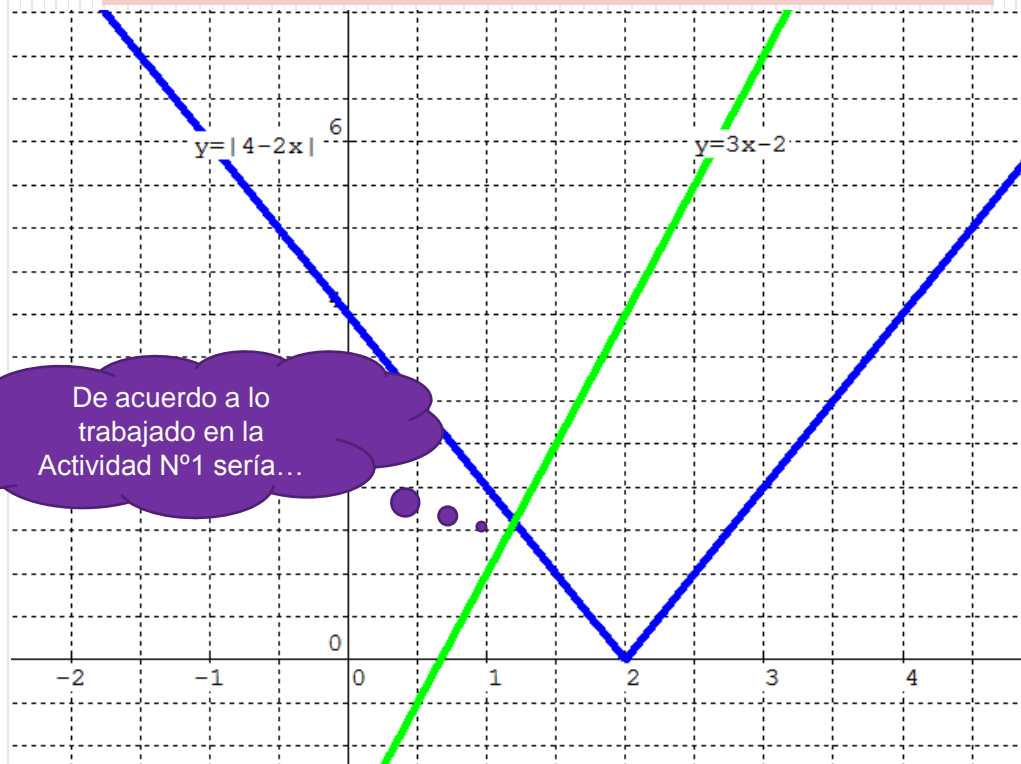
Cerrar

Error

 No puedo resolver esta ecuación usando el método de Newton; parece no ser derivable.

Aceptar

Su interpretación gráfica



De acuerdo a lo trabajado en la Actividad N°1 sería...

Método de Newton para $f(x)=0$

El método de Newton es la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$



Isaac Newton (1643-1727)

El primer escrito donde aparece el Cálculo Diferencial e Integral fue un manuscrito de Newton que entregó a su mentor Isaac Barrow (1630-1677) en 1669. De este pequeño tratado, *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, circularon copias en los círculos matemáticos de Inglaterra. Allí Newton expone un método para hallar soluciones de ecuaciones, que luego utiliza para invertir series de potencias y así desarrollar su cálculo.

Su primer ejemplo estudia la ecuación

$$y^3 - 2y - 5 = 0$$

Comprueba que la solución está cerca de $y=2$. Luego sustituye $y=2+p$, para obtener

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

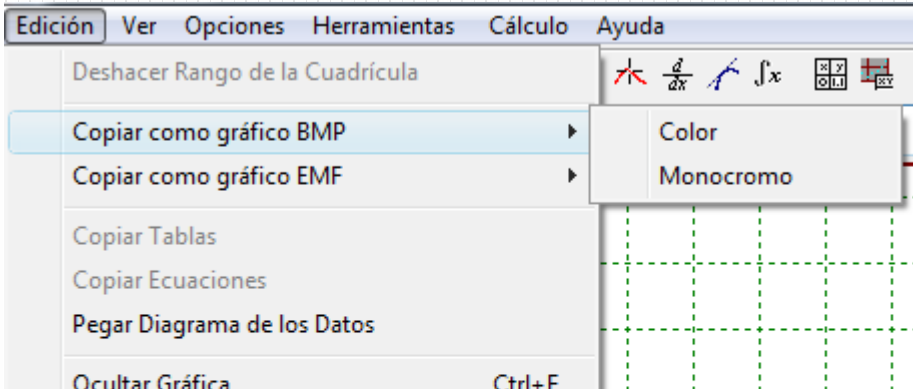
Como p es pequeño, elimina $p^3 + 6p^2$ de la ecuación para llegar a $10p - 1 = 0$, de donde aproximadamente es $p=0.1$. Por tanto sería $y=2.1$, esta es la primera aproximación de la raíz. Ahora toma $p=0.1+q$ y sustituye en la ecuación en p anterior para llegar a

$$q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$$

Otra vez desecha los términos $q^3 + 6.3q^2$ para de $11.23q + 0.061 = 0$ obtener aproximadamente $q = -0.0054$, de donde ahora $y = 2.0946$, y así sucesivamente.

Más posibilidades de Graphmatica

Podemos copiar las gráficas realizadas en Graphmatica y pegarlas en Word

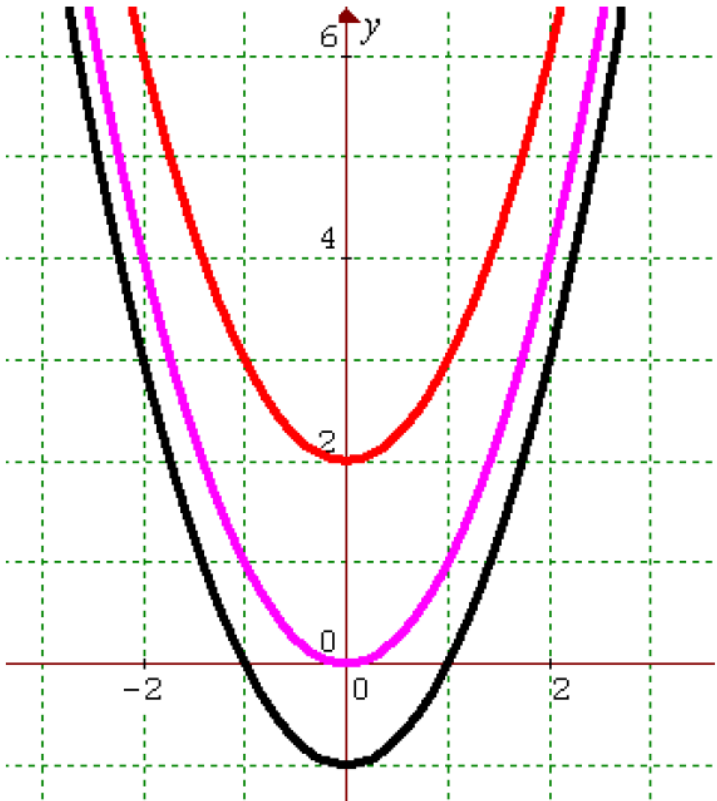


Actividades realizadas con Graphmatica

GRÁFICO 1:

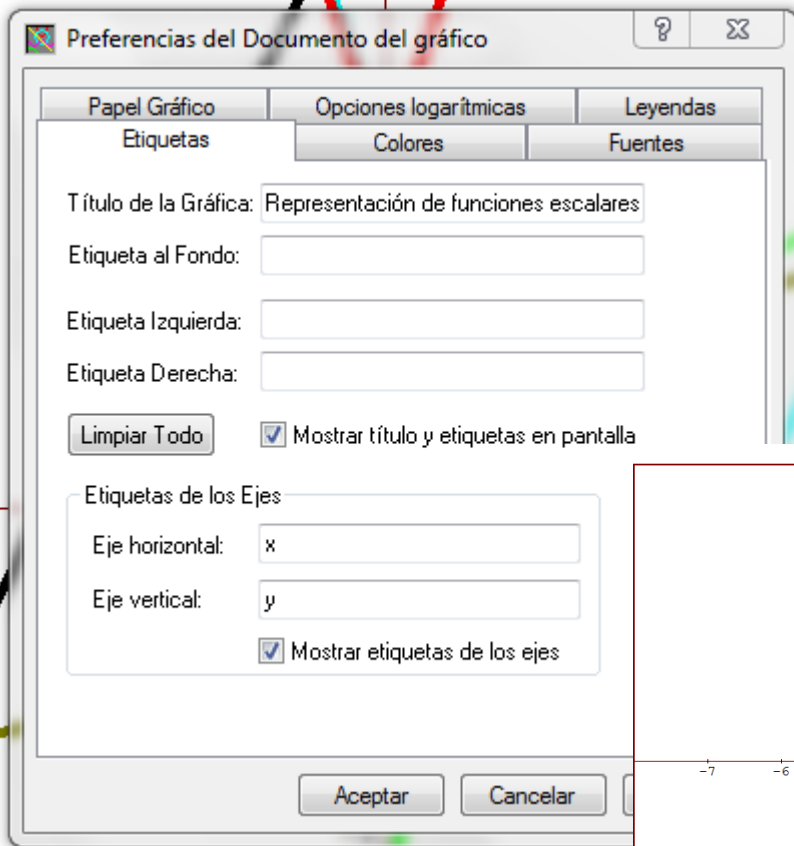
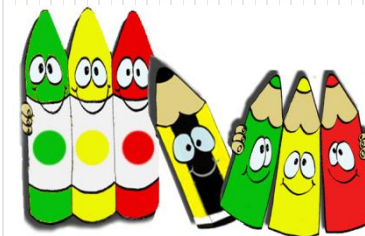
Observar el gráfico:

- ¿Es posible escribir las ecuaciones de las funciones cuadráticas representadas? En caso que sea posible escribir:
 - La ecuación correspondiente a P1 (la parábola roja)
 es:.....
 - La ecuación correspondiente a P2 (la parábola fucsia)
 es:.....
 - La ecuación correspondiente a P3 (la parábola negra)
 es:.....
- Abrir un documento en Graphmatica y representa las funciones cuadráticas y verificar que se obtiene el mismo gráfico 1.

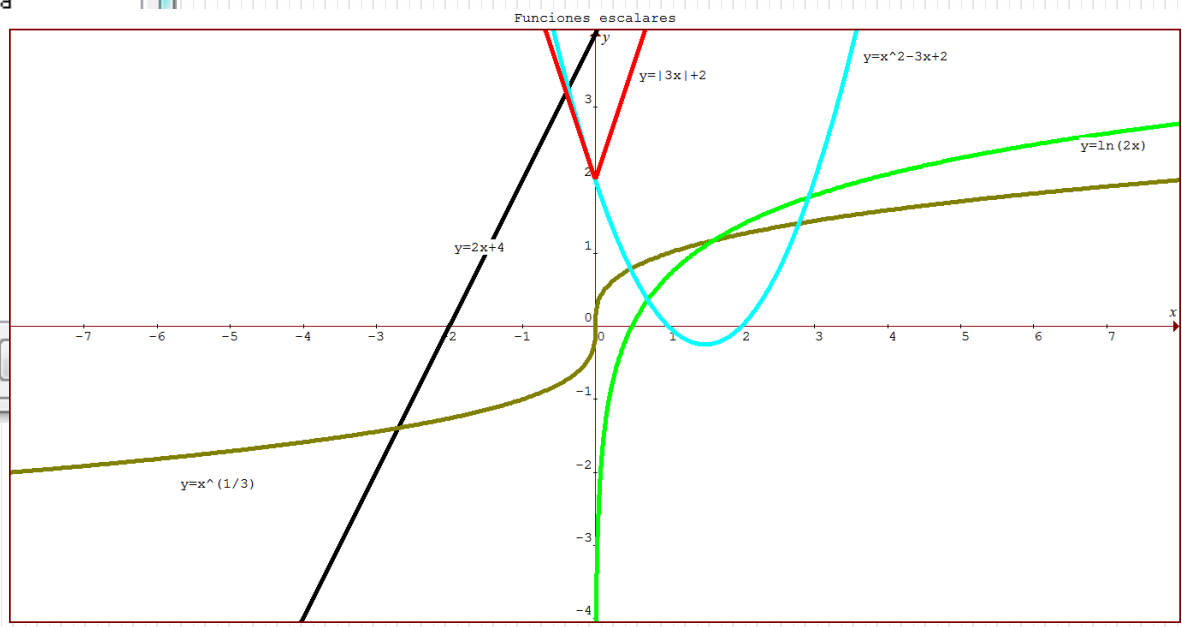


Trabajo Funciones cuadráticas

Título de la gráfica y etiquetas...



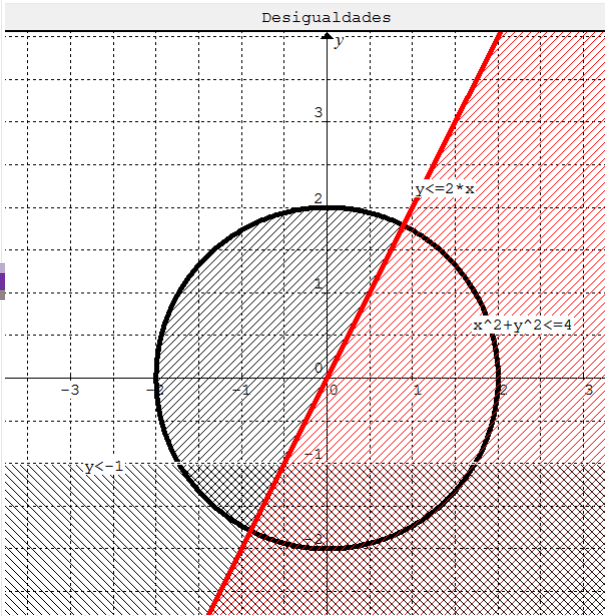
Más
posibilidades de
Graphmatica



Otras construcciones

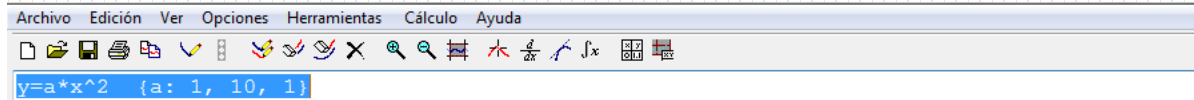
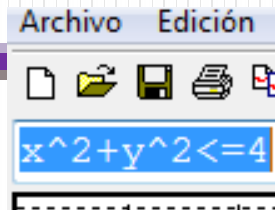
Desigualdades

ACTIVIDAD N°3



Representar la región del plano limitada por las siguientes desigualdades

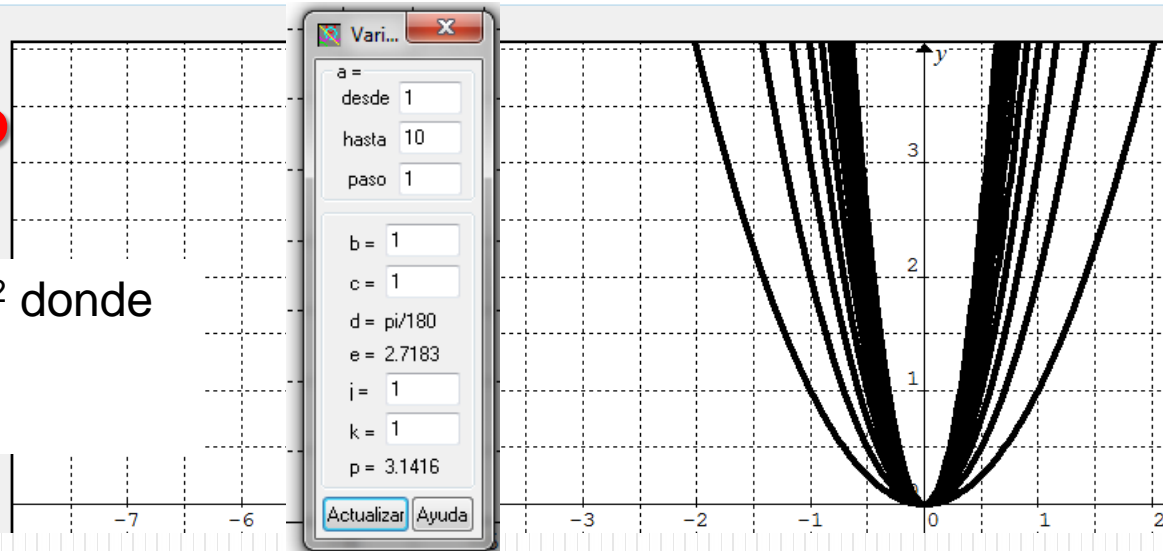
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y < -1 \\ y \leq 2x \end{cases}$$



Comportamiento de funciones

Representar la función $f(x) = ax^2$ donde $0 < a < 10$ y estudiar cómo se comporta la gráfica

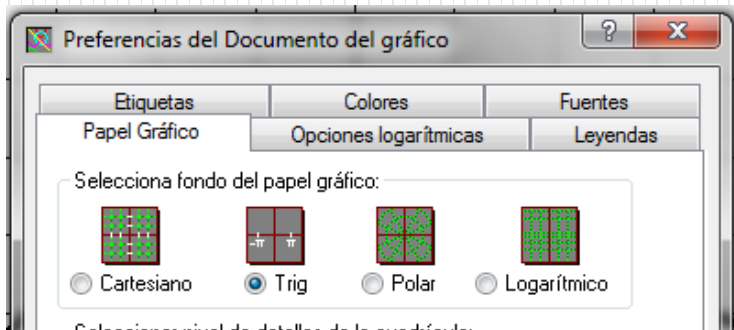
ACTIVIDAD N°4



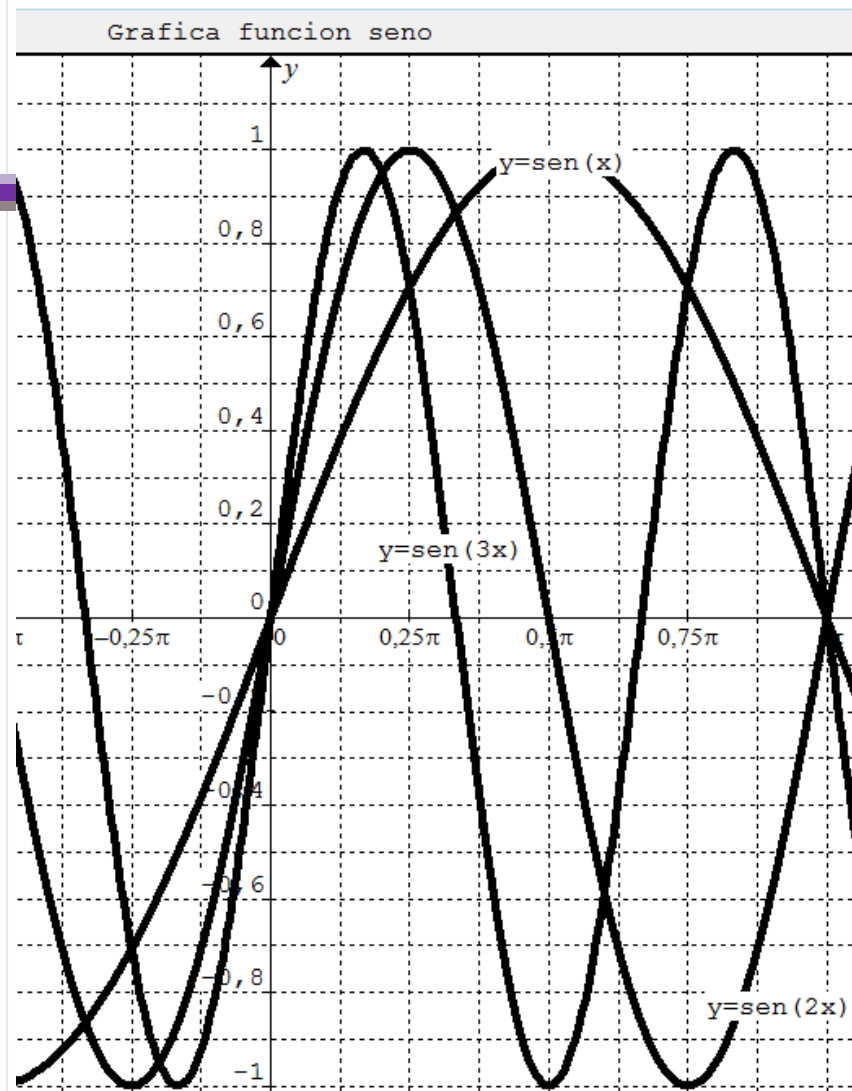
Otras construcciones

Funciones trigonométricas

Representar la función $f(x)=\text{sen}(a.x)$ para "a" igual a 1, 2 y 3.



ACTIVIDAD N°5



Otras construcciones

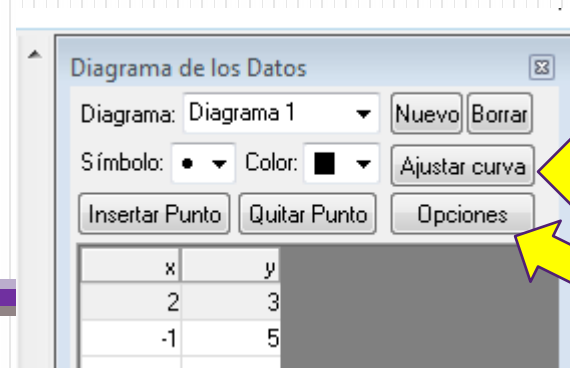
Ajustes de curvas

Representar los puntos que se dan a continuación y trazar las gráficas solicitadas.

Por A = (2, 3) y B = (-1, 5) una función lineal

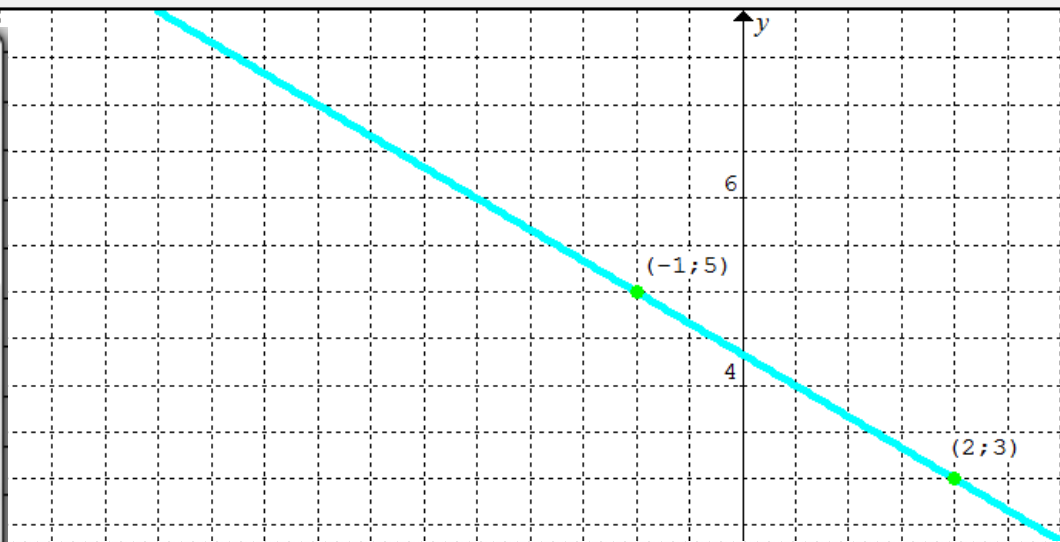
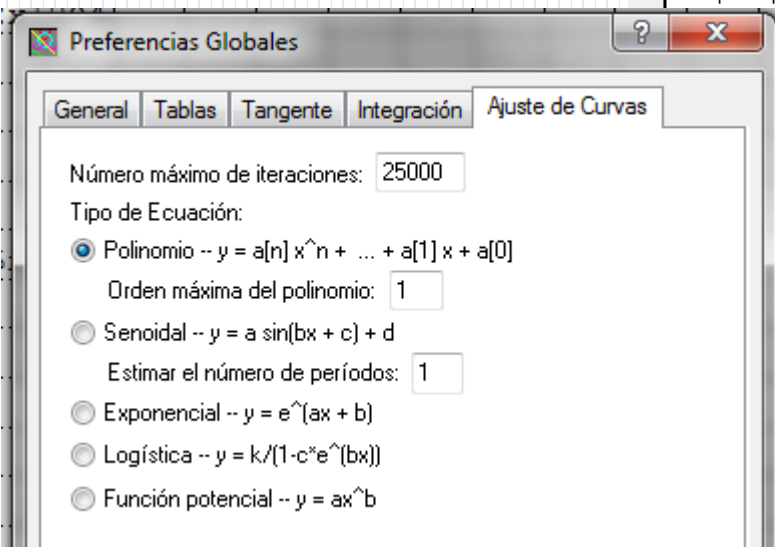
Por A = (0,0), B=(2,3) y C= (-3, 5) una función cuadrática

Por A = (1,2) y B=(2, 1) una función exponencial

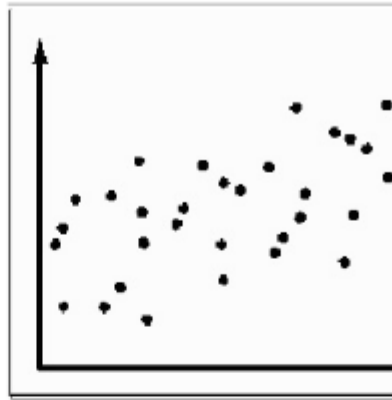


ACTIVIDAD N°6

$y = -0,6667x + 4,33$ ajuste de curva $\chi^2=0$ después de 526 iteraciones



MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS



AJUSTES DE RECTAS POR MINIMOS CUADRADOS

Toda función *Lineal o Curvilínea* se puede ajustar a un polí métodos numéricos.

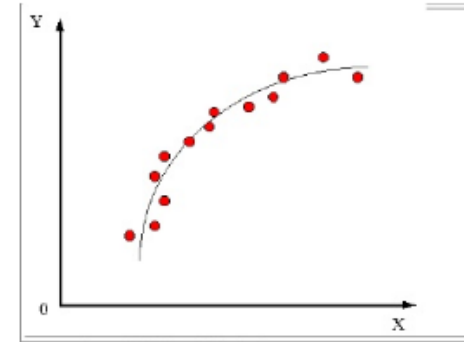
Presentaremos a continuación el caso más simple: *el ajuste de una función lineal (esto es, el ajuste de una recta o de un polinomio de grado uno).*

La técnica que presentaremos se conoce como *"El Método de los Mínimos Cuadrados"* y se fundamenta en el hecho de que el mejor ajuste se obtiene cuando la suma de los cuadrados de las desviaciones de la variable dependiente alcanza su valor mínimo.

Para encontrar el valor mínimo de las desviaciones de la variable dependiente se varían parámetros; en el caso de una recta los parámetros libres a variar son precisamente la pendiente de la recta y el valor de la ordenada en el origen (esto es, se harán variar m y b , las cuales hemos considerado hasta ahora como constantes, de modo de encontrar los valores que correspondan a la recta que mejor se ajuste a los datos experimentales).

AJUSTES DE CURVAS POR MINIMOS CUADRADOS

Supongamos ahora que tenemos un conjunto de puntos que mostramos en la siguiente gráfica



De los puntos mostrados nos podemos dar cuenta que parece tener la forma de un polinomio de segundo grado de la forma:

$$Y = a_1 + a_2 X + a_3 X^2 \quad (1)$$

Material en la
 CVrd para
 profundizar

Otras construcciones

Cálculo de derivadas, gráfico de rectas tangentes y búsqueda de puntos críticos

ACTIVIDAD N°7

Para la función $y = \frac{2x^5 + 8x^4 + x - 15}{x - 9}$ obtener:

- La representación del conjunto gráfica.
- Su derivada y valor de la misma para $x = 10$. Interpretar gráficamente.
- La recta tangente para $x = -3$

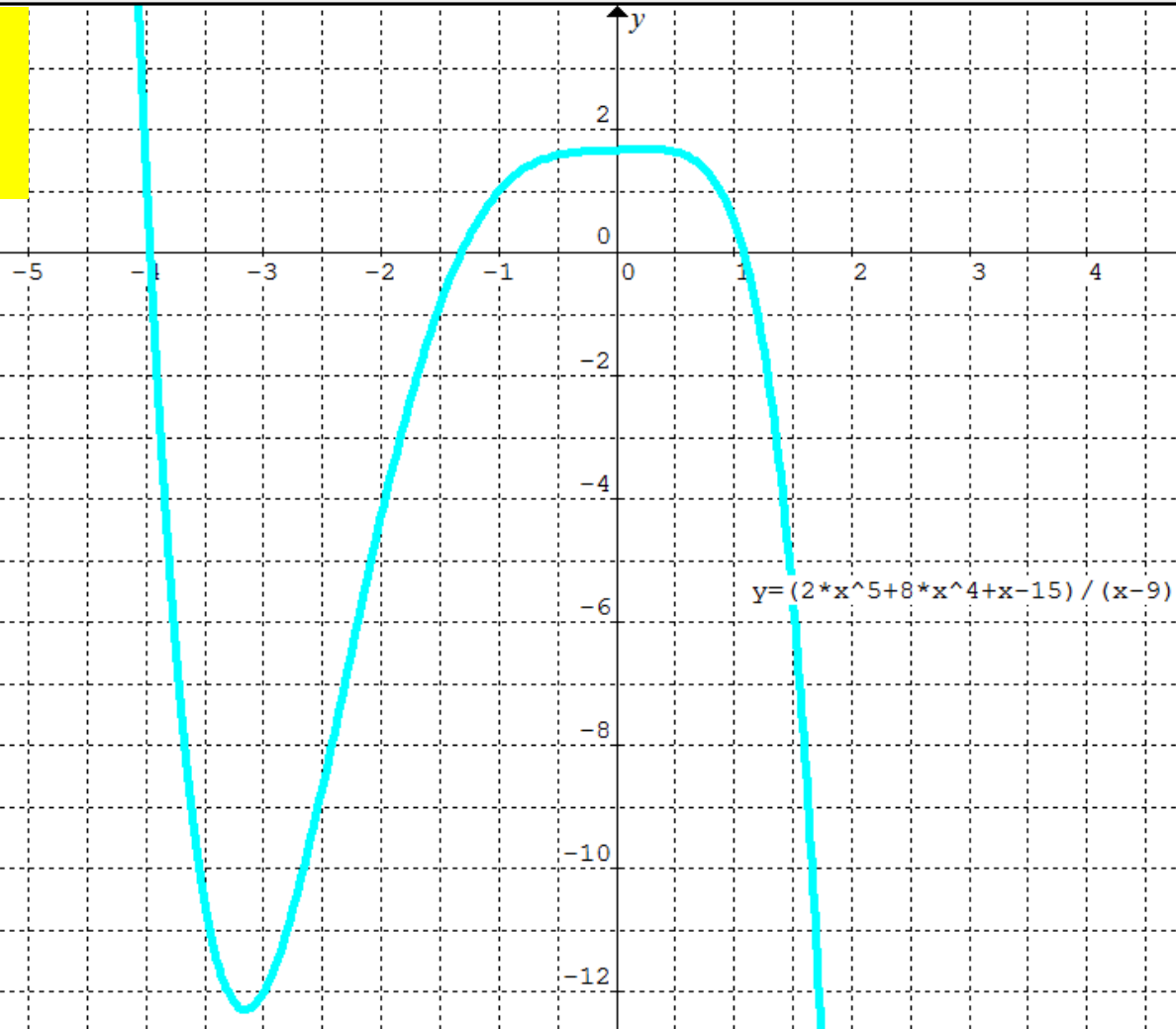
Esta actividad requiere del uso de un software

Gráfico de la función

$$y = (2x^5 + 8x^4 + x - 15) / (x - 9)$$

Contar con la gráfica nos permite analizar...

Raíces reales...
 Extremos...
 Teorema de Bolzano....



$$y = (2x^5 + 8x^4 + x - 15) / (x - 9)$$

Encontrar Puntos Críticos:
 $y = (2x^5 + 8x^4 + x - 15) / (x - 9)$

Tipo	x	y
Cero	-3,9615	
Míni...	-3,1578	-12,2827
Cero	-1,3211	
Máx...	0,2699	1,6821
Cero	1,0818	

Ajustar bien la cuadrícula para poder visualizar toda la gráfica

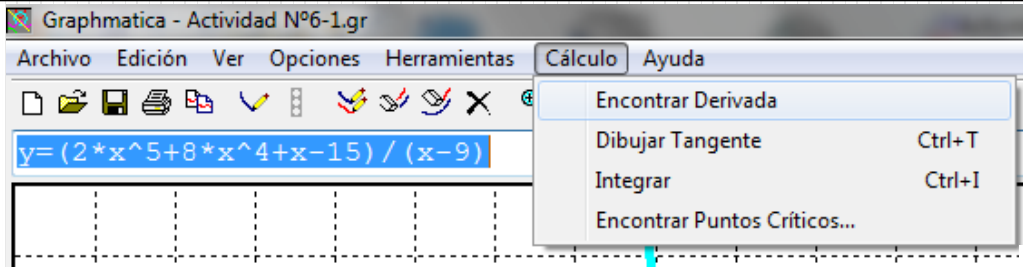
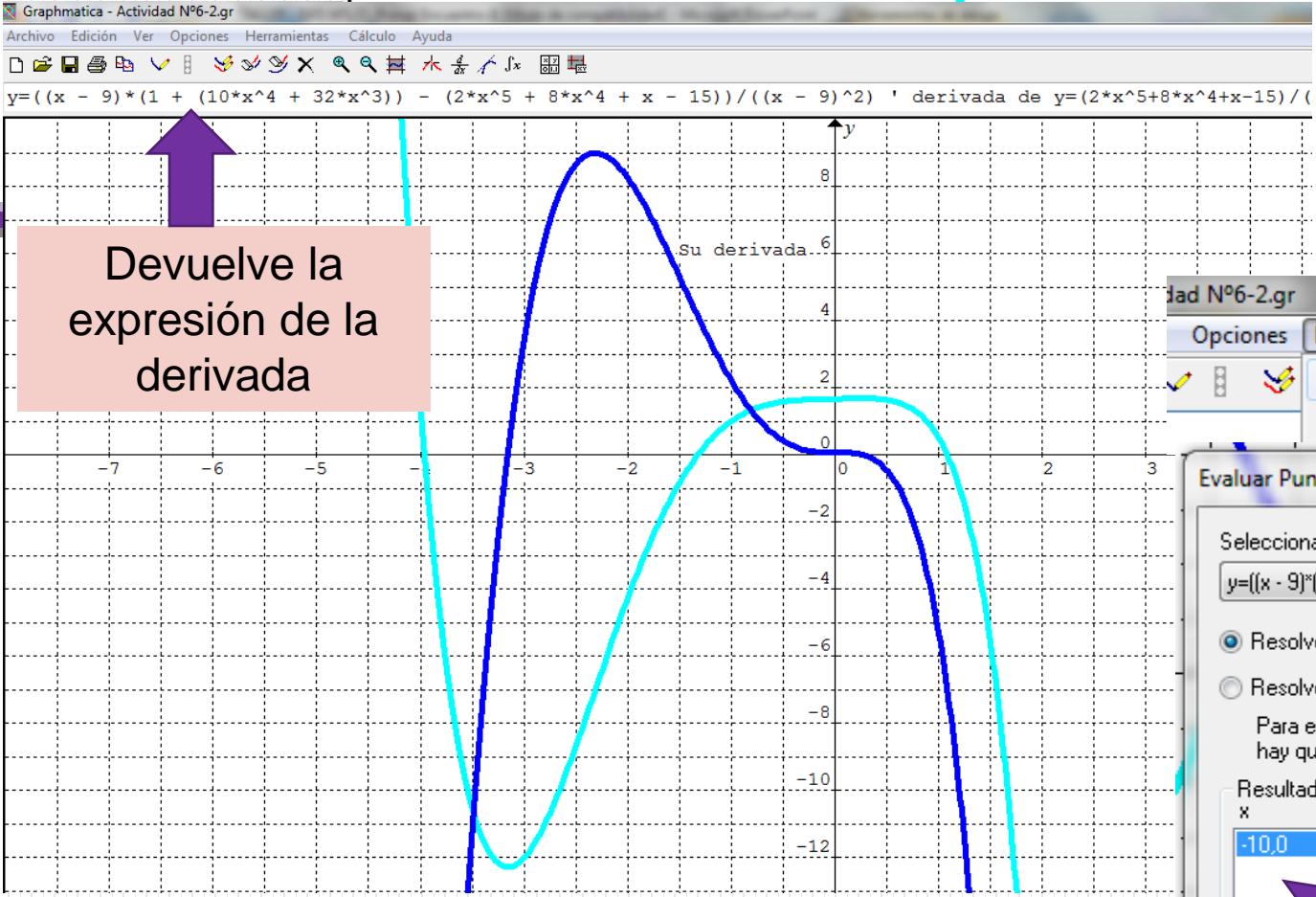
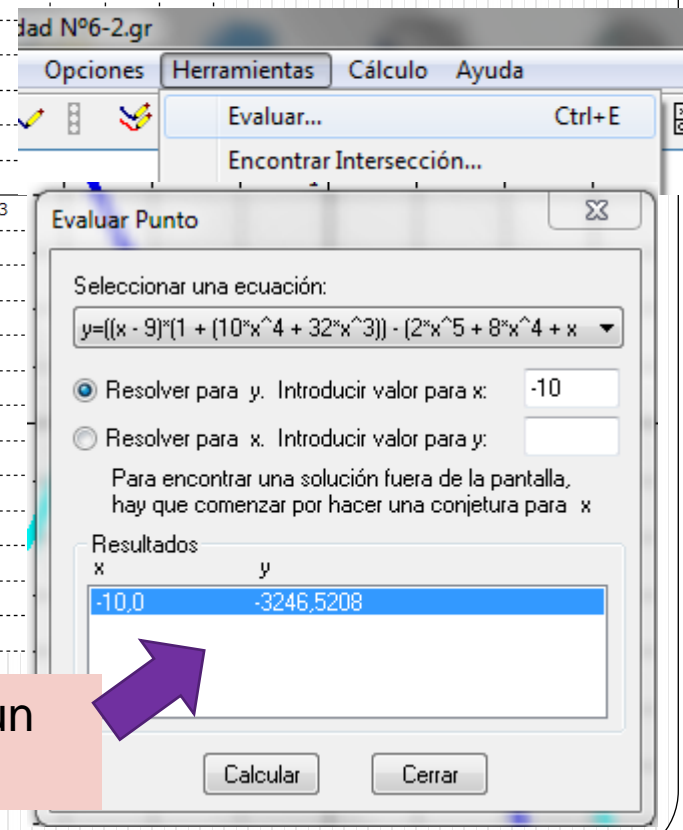


Gráfico función derivada



Devuelve la expresión de la derivada

El valor de la derivada para un determinado valor de x



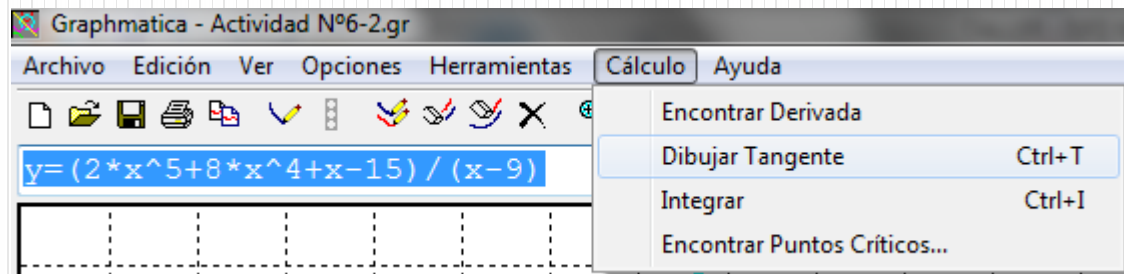


Gráfico recta tangente

Además de dibujarla
 brinda información
 sobre la recta
 tangente

Dibujar Recta Tangente

Ecuación: $y = (2x^5 + 8x^4 + x - 15) / (x - 9)$

Dibujar tangente en x = -3 y = -11,99

Pendiente: 3,4953 Recta tangente: $y = 3,5x - 1,51$

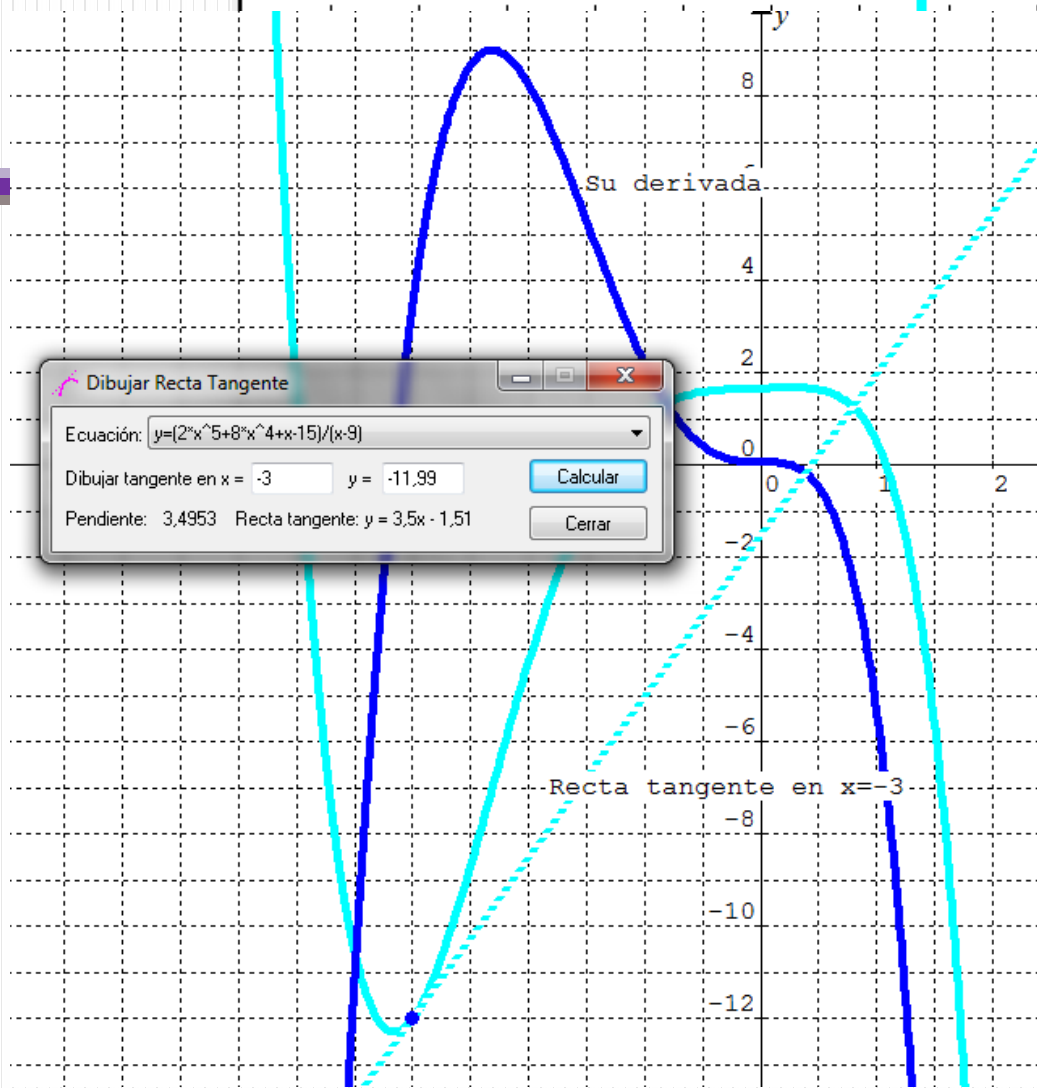


Diagrama de los Datos

Diagrama: Diagrama 1

Símbolo: ● Color: ■

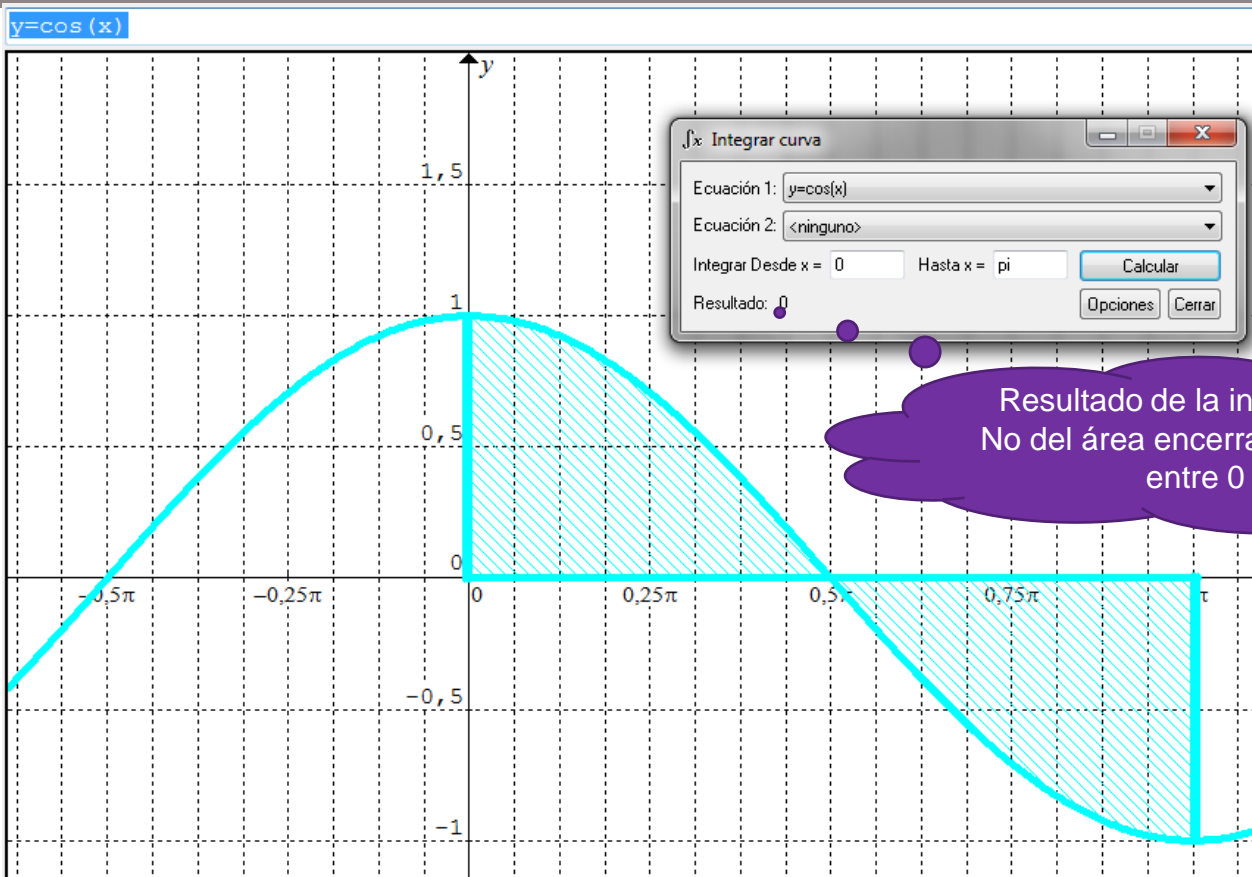
x	y
-3	-11,99

ACTIVIDAD N°8

Cálculo de integrales

VIDEO 1

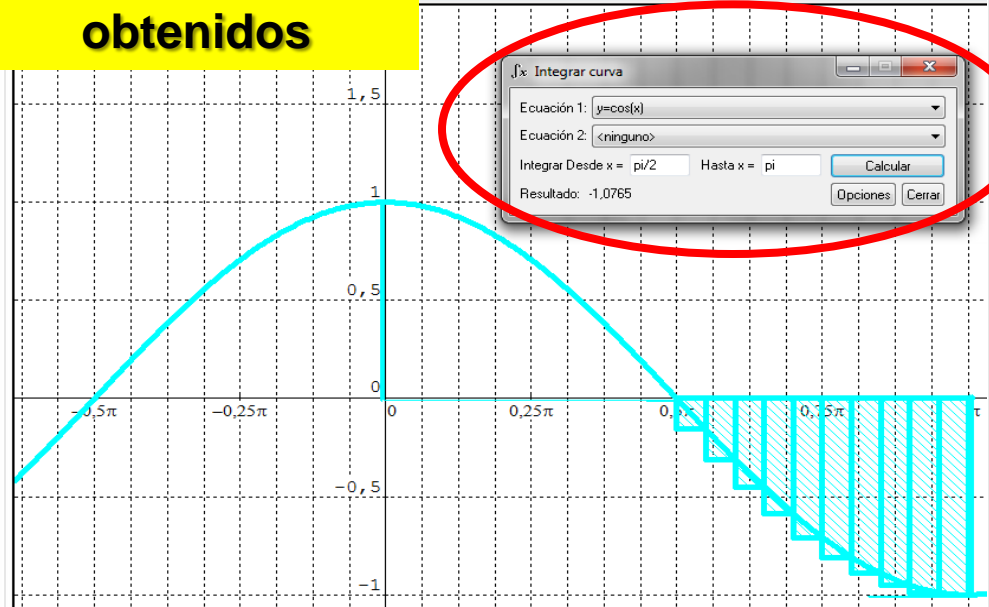
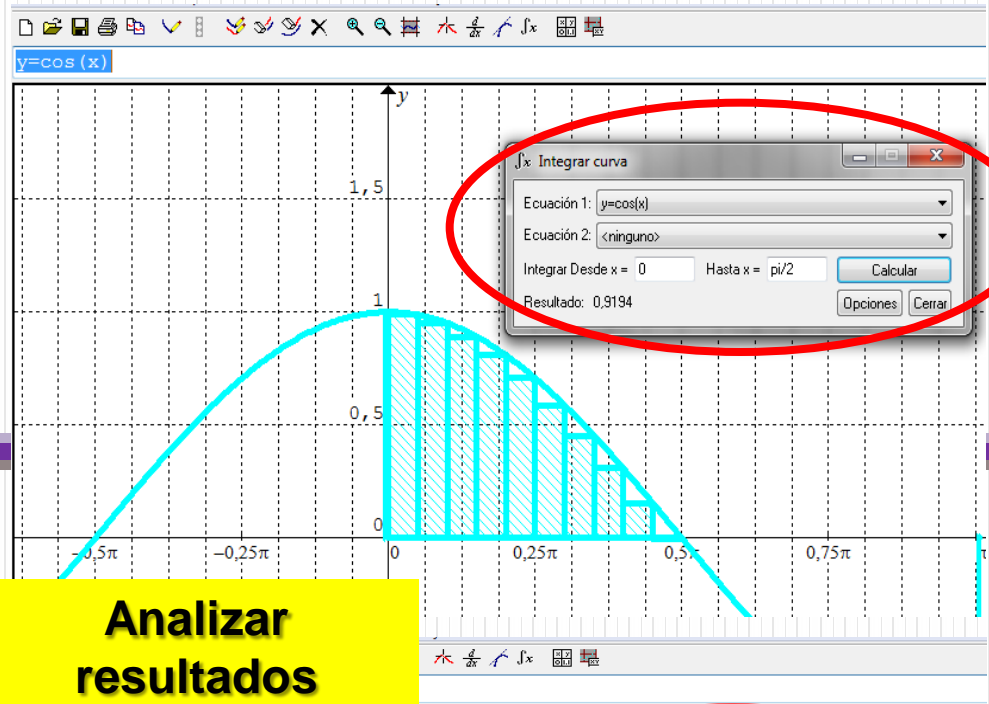
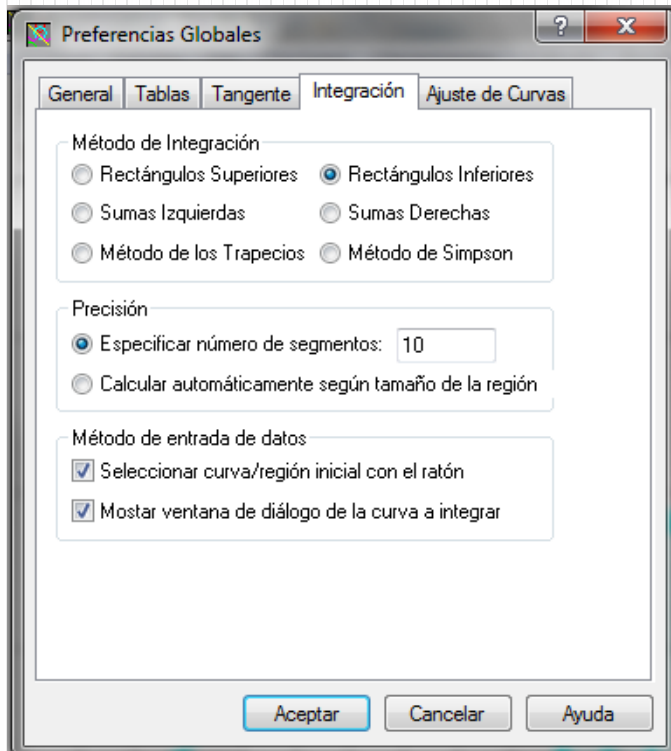
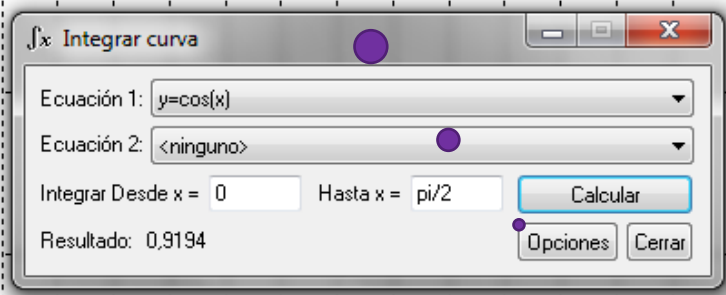
Completar la actividad propuesta en el video y calcular el área indicada



Análisis didáctico de la situación

Resultado de la integral definida
No del área encerrada por la curva
entre 0 y Pi

Haciendo clic
en opciones



Una reflexión final

Como afirma Elfriede Wenzelburger Guttenberger *“La presencia de calculadoras (y/o computadoras) para demostraciones, resolución de problemas, práctica y evaluación, crea una nueva dinámica en el salón de clase, en el cual profesores y estudiantes son compañeros naturales en la búsqueda de comprensión de ideas matemáticas y de la resolución de problemas. Si los profesores están preparados para aceptar el reto de esta nueva tecnología, entonces la educación cambiará”* (Guttenberger, 1993¹).